Ненад Весић и Ивана Ђуришић

СПЕЦИЈАЛНИ ПОЛИНОМИ СТЕПЕНА $k+1$

1. Увод

Природни бројеви су најосновнија математичка структура која се током школовања упознаје. Различити односи међу природним бројевима доказују се као теореме и последица су решавања задатака.

Скуп природних бројева $\mathbb{N}$ значајан је како у алгебри тако и у математичкој анализи. Док се у алгебри доказују различита својства самих природних бројева [2–4], у математичкој анализи се природни бројеви користе као индекси помоћу којих се доказује постојање или непостојање граничних вредности различитих функција [1].

Због немогућности решавања једначине $x+1=0$ у скупу природних бројева, скуп $\mathbb{N}$ је проширен до скупа целих бројева $\mathbb{Z}$. Како је једначина $2x=-1$ нерешива у скупу $\mathbb{Z}$, скуп целих бројева је проширен до скупа рационалних бројева $\mathbb{Q}$. С обзиром на то да је једначина $x^2=2$ нерешива у скупу $\mathbb{Q}$, скуп рационалних бројева је проширен до скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. О детаљима тих проширења могуће је прочитати у књигама [2–4]. У овом раду, природни, цели и рационални бројеви ће бити најчешће коришћене структуре. Реални бројеви ће бити такође коришћени у овом раду, али не као главни објекти проучавања.

Истраживање, чији ће резултати бити приказани, мотивисано је формулама:

$$1+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1), \tag{1}$$

$$1^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \tag{2}$$

$$1^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \tag{3}$$

где је n природан број. Проблем на који је овај рад фокусиран јесте како одредити суму

$$\mathcal{S}_n^k=1^k+\cdots+n^k, \tag{4}$$

за природне бројеве n и k (или бар неке од природних бројева k).

*Ово истраживање финансијски је потпомогнуто од стране Министарства науке, технолошког развоја и иновација преко Математичког института САНУ.

1.1. Системи линеарних једначина

Систем од p линеарних једначина са q непознатих $x_1, \ldots, x_q$ је:

$$S_q^p : \begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_q^1 x_q = b^1 \\ a_1^2 x_1 + \cdots + a_q^2 x_q = b^2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_1^p x_1 + \cdots + a_q^p x_q = b^p \end{cases} \tag{5}$$

где су a_j^i и b^i ($i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$) константе [3, 4].

Специјалан случај система једначина је квадратни систем, тј. систем једначина задат помоћу (5), где је $p = q$. Такав систем је облика:

$$S_p^p \equiv S_p : \begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_p^1 x_p = b^1 \\ a_1^2 x_1 + \cdots + a_p^2 x_p = b^2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_1^p x_1 + \cdots + a_p^p x_p = b^p \end{cases} \tag{6}$$

Детерминанта главне матрице система задатог помоћу (6) је

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_p^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_p^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^p & \ldots & a_p^p \end{vmatrix}.$$

Детерминанта која одговара променљивој x_r, $r \in \{1, \ldots, p\}$, је

$$D_r = \begin{vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_{r-1}^1 & b^1 & a_{r+1}^1 & \ldots & a_p^1 \\ a_1^2 & \ldots & a_{r-1}^2 & b^2 & a_{r+1}^2 & \ldots & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^p & \ldots & a_{r-1}^p & b^p & a_{r+1}^p & \ldots & a_p^p \end{vmatrix}.$$

Систем S_p има јединствено решење ако и само ако је $D \neq 0$. У том случају решење система (6) је уређена p-торка

$$(x_1, \ldots, x_p) = \left(\frac{D_1}{D}, \ldots, \frac{D_p}{D} \right).$$

Уколико је главна детерминанта система S_p лево троугаона, тј. ако је

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{p-1} & a_2^{p-1} & \ldots & a_{p-1}^{p-1} & 0 \\ a_1^p & a_2^p & \ldots & a_{p-1}^p & a_p^p \end{vmatrix},$$

при чему је $a_i^i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, p\}$, онда је решење тог система задато рекурзивно, за $s \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$x_1 = -\frac{b^1}{a_1^1}, \quad x_{s+1} = \frac{b^{s+1} - \sum_{i=1}^{s} a_i^{s+1} x_i}{a_{s+1}^{s+1}}.$$

1.2. Полиноми

У овом поглављу, подсетићемо се дефиниције и особина полинома неопходних за истраживање представљено у овом раду. О осталим детаљима у вези са полиномима, могуће је прочитати у [3, 4].

Функција

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \tag{7}$$

где су a_0, a_1, ..., a_n елементи скупа $\mathbb{Q}$, $a_n \neq 0$, а x реална променљива, назива се полином степена n над пољем $\mathbb{Q}$. Рационални бројеви a_0, a_1, ..., a_n су коефицијенти полинома $P(x)$.

Полином $P(x)$ је могуће представити као производ полинома степена 1 и 2 са реалним коефицијентима (ово је последица Основне теореме алгебре). Такво представљање назива се факторизација полинома $P(x)$. Полином $P(x)$ степена n дељив је полиномом $\pi(x)$ степена m, $m \leqslant n$, ако постоји полином $\mu(x)$ такав да је $P(x) = \pi(x)\mu(x)$.

Два полинома, (7) и

$$Q(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0, \tag{8}$$

$a_n \neq 0$, $A_m \neq 0$, једнака су ако и само ако је $m = n$ и $A_m \equiv A_n = a_n$, $A_{m-1} \equiv A_{n-1} = a_{n-1}$, ..., $A_1 = a_1$, $A_0 = a_0$.

Линеарна комбинација полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и $Q(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$, с константама $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, је полином степена највише n који је једнак

$$R(x) = (\alpha a_n + \beta A_n) x^n + (\alpha a_{n-1} + \beta A_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha a_1 + \beta A_1) x + (\alpha a_0 + \beta A_0).$$

1.3. Мотивација

Суме $\mathcal{S}_n^1$, $\mathcal{S}_n^2$, $\mathcal{S}_n^3$, приказане једнакостима (1), (2), (3), су полиноми степена 2, 3 и 4, редом. Мотивисано тиме, циљеви овог рада су следећи:

1. Одредити фамилију полинома степена $k+1$ од којих један одговара суми $\mathcal{S}_n^k$ која је задата једнакошћу (4).
2. Одредити суме k-тих степена првих n природних бројева за $k = 1, \dots, 10$.
3. Приказати односе између сума различитих степена првих n природних бројева.

2. Полиномна једначина

Проблем којим ћемо се бавити у овом поглављу јесте одређивање полинома

$$p_{k+1}(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{9}$$

који идентички задовољава једнакост

$$p_{k+1}(1+x) = p_{k+1}(x) + (1+x)^k. \tag{10}$$

Докажимо наредно тврђење.

Тврђење 1. *Уколико је $\alpha a_0 + \beta A_0 = 0$, и ако су π, μ, ν, ρ константе, тада линеарна комбинација полинома $P(\pi x + \mu)$ и $Q(\nu x + \rho)$ задатих једнакостима* (7), (8), *једнака $\mathcal{R}(x) = \alpha P(\pi x + \mu) + \beta Q(\nu x + \rho)$, не зависи од коефицијената a_0 и A_0.*

Доказ. Важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(x) &= \alpha P(\pi x + \mu) + \beta Q(\nu x + \rho) \\
&= \alpha\big(a_n(\pi x + \mu)^n + a_{n-1}(\pi x + \mu)^{n-1} + \cdots + a_1(\pi x + \mu) + a_0\big) \\
&\quad + \beta\big(A_n(\nu x + \rho)^n + A_{n-1}(\nu x + \rho)^{n-1} + \cdots + A_1(\nu x + \rho) + A_0\big) \\
&= \alpha\big(a_n(\pi x + \mu)^n + a_{n-1}(\pi x + \mu)^{n-1} + \cdots + a_1(\pi x + \mu)\big) \\
&\quad + \beta\big(A_n(\nu x + \rho)^n + A_{n-1}(\nu x + \rho)^{n-1} + \cdots + A_1(\nu x + \rho)\big) + 0,
\end{aligned}$$

чиме је доказ овог тврђења завршен. ■

У наредној леми приказаћемо неке од особина полинома $p_{k+1}(x)$ под претпоставком да такав полином постоји. Након леме, одредићемо линеарне једначине које генеришу коефицијенте полинома $p_{k+1}(x)$.

Лема 1. *Полином $p_{k+1}(x)$, задат једнакошћу* (9), *а који испуњава додатни услов* (10), *задовољава једнакости:*

$$p_{k+1}(1) = a_{k+1} + a_k + \cdots + a_1 + a_0, \quad p_{k+1}(0) = a_0, \quad p_{k+1}(-1) = a_0. \tag{11}$$

За сваки природан број n, важе једнакости:

$$\begin{aligned}
p_{k+1}(-n) &= a_0 - (-1)^k\big(1^k + \cdots + (n-1)^k\big), \\
p_{k+1}(n) &= a_0 + 1^k + \cdots + n^k.
\end{aligned}$$

Доказ. Прве две једнакости у релацијама (11) следе директно из вредности полинома $p_{k+1}(x)$ у тачкама $x = 1$ и $x = 0$. Заменом $x = -1$ у једначини (10) долазимо до закључка да је

$$p_{k+1}\big(1 + (-1)\big) = p_{k+1}\big(-1\big) + \big(1 + (-1)\big)^k,$$

односно $p_{k+1}(0) = p_{k+1}(-1) + 0$. Како је $p_{k+1}(0) = a_0$, то следи да је и $p_{k+1}(-1) = a_0$.

Други део ове леме ћемо доказати математичком индукцијом.

– *Случај* $n_0 = 1$:

Већ је доказано да је $p_{k+1}(-1) = p_{k+1}(-n_0) = a_0$, што значи да је у овом случају тврђење испуњено.

– *Индуктивна хипотеза за* $n_0 = n$:

За неко $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост

$$p_{k+1}(-n) = a_0 - (-1)^k\big(1^k + \cdots + (n-1)^k\big). \tag{12}$$

– *Индуктивни доказ за* $n_0 = n + 1$:

Заменом $x = -n - 1$ у додатном услову (10) долазимо до тога да важи

$$p_{k+1}(1 + n_0) = p_{k+1}\big((1 + (-n - 1)\big) = p_{k+1}(-n - 1) + \big(1 + (-n - 1)\big)^k,$$

тј.

$$p_{k+1}(-n) = p_{k+1}\big(-(n + 1)\big) + (-1)^k \cdot n^k.$$

Како је, према индуктивној хипотези, задовољена једнакост (12), из последње добијене једнакости следи да важи једнакост

$$p_{k+1}\big(-(n + 1)\big) = a_0 - (-1)^k\big(1^k + \cdots + (n - 1)^k + n^k\big),$$

чиме је доказ овог дела леме завршен.

Трећи део леме доказујемо аналогно доказивању другог дела овог тврђења.

– *Случај* $n_0 = 1$:

Уколико заменимо $x = 0$ у услов (10) и искористимо већ доказану чињеницу да је $p_{k+1}(0) = a_0$, долазимо до закључка да је $p_{k+1}(1) = a_0 + 1^k$.

– *Индуктивна хипотеза за* $n_0 = n$:

За неко $n \in \mathbb{N}$ важи једнакост

$$p_{k+1}(n) = a_0 + 1^k + \cdots + n^k.$$

– *Индуктивни доказ за* $n_0 = n + 1$:

На основу услова (10) закључујемо да важе једнакости

$$p_{k+1}(n_0) = p_{k+1}(1+n) = p_{k+1}(n) + (1+n)^k = \big(a_0 + 1^k + \cdots + n^k\big) + (n+1)^k.$$

Тиме је доказ ове леме завршен. ■

Једнакост

$$p_{k+1}(1 + x) - p_{k+1}(x) = (1 + x)^k \tag{13}$$

еквивалентна је једнакости (10) и задовољена је за свако $x \in \mathbb{R}$. Стога су коефицијенти полинома $L_k(x) = p_{k+1}(1+x) - p_{k+1}(x)$ једнаки одговарајућим коефицијентима полинома $D_k(x) = (1 + x)^k$.

Пре него што упоредимо коефицијенте у полиномима $L_k(x)$ и $D_k(x)$, подсетимо се да важе једнакости:

$$(1+x)^p = \binom{p}{0}x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}x^1 + \binom{p}{p},$$

$$(1+x)^p - x^p = \binom{p}{1}x^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}x^1 + \binom{p}{p}, \tag{14}$$

$p \in \mathbb{N}$. На основу једнакости (14) следи да је $L_k(x)$ полином степена k.

У једнакости (14), коефицијент који одговара степену x^q, $0 \leqslant q < p$, једнак је

$$c_q^p = \binom{p}{p-q}.$$

Разлика $L_k(x)$ једнака је

(15)

$$\begin{aligned}
L_k(x) &= a_{k+1}\big((1+x)^{k+1} - x^{k+1}\big) + a_k\big((1+x)^k - x^k\big) + \cdots + a_1\big((1+x)^1 - x^1\big)\\
&= a_{k+1}\Big(\binom{k+1}{1}x^k + \binom{k+1}{2}x^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k}x^1 + \binom{k+1}{k+1}x^0\Big)\\
&\quad + a_k\Big(\binom{k}{1}x^{k-1} + \binom{k}{2}x^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}x^1 + \binom{k}{k}x^0\Big)\\
&\quad \vdots\\
&\quad + a_p\Big(\binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x^1 + \binom{p}{p}x^0\Big)\\
&\quad \vdots\\
&\quad + a_1\Big(\binom{1}{1}x^0\Big).
\end{aligned}$$

Из једнакости (15) читамо да се сабирци са степеном x^{p-1}, $p \in \{1, \ldots, k+1\}$, јављају само уз коефицијенте a_{k+1}, $\ldots$, a_p. Коефицијент у развоју полинома $L_k(x)$ уз x^{p-1} је

$$\begin{aligned}
\ell_{p-1} = a_{k+1}\binom{k+1}{k+1-(p-1)} + a_k\binom{k}{k-(p-1)} + \cdots +&\\
+ a_{p+1}\binom{p+1}{p+1-(p-1)} + a_p\binom{p}{p-(p-1)}&.
\end{aligned}$$

На десној страни једнакости (13), коефицијент уз x^{p-1} је

$$d_{p-1} = \binom{k}{p-1}.$$

Како је $L_k(x) = D_k(k)$ за свако $x \in \mathbb{R}$, закључујемо да је $\ell_{p-1} = d_{p-1}$, тј.

$$\begin{aligned}(16)\quad & a_{k+1}\binom{k+1}{k+1-(p-1)} + a_k\binom{k}{k-(p-1)} + \cdots + \\ & + a_{p+1}\binom{p+1}{p+1-(p-1)} + a_p\binom{p}{p-(p-1)} = \binom{k}{p-1}.\end{aligned}$$

Размотрићемо случај довољно великог степена k. За различите $p \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$, а на основу једначине (16), закључујемо да је задовољен следећи систем линеарних једначина по $a_{k+1}, \ldots, a_1$:

$$(17)\qquad \mathcal{S}_{\mathcal{A}}: \begin{cases} \binom{k}{0} = a_{k+1}\binom{k+1}{1} \\ \binom{k}{1} = a_{k+1}\binom{k+1}{2} + a_k\binom{k}{1} \\ \binom{k}{2} = a_{k+1}\binom{k+1}{3} + a_k\binom{k}{2} + a_{k-1}\binom{k-1}{1} \\ \quad\vdots \\ \binom{k}{k} = a_{k+1}\binom{k+1}{k+1} + a_k\binom{k}{k} + \cdots + a_1\binom{1}{1}. \end{cases}$$

Важи наредна теорема.

Теорема 1. *Матрица $M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, задатог једначинама* (17)*, доње је троугаона и њен облик је*

$$(18)\qquad M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} = \begin{bmatrix} \binom{k+1}{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{k+1}{2} & \binom{k}{1} & 0 & \ldots & 0 \\ \binom{k+1}{3} & \binom{k}{2} & \binom{k-1}{1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k+1}{k+1} & \binom{k}{k} & \binom{k-1}{k-1} & \ldots & \binom{k-(k-1)}{k-(k-1)} \end{bmatrix}.$$

Детерминанта матрице $M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ је $\det M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} = (k+1)! \neq 0$.

Систем једначина $\mathcal{S}_A$ има јединствено решење по $a_{k+1}, a_k, \ldots, a_1$. Коефицијент a_0 је произвољан.

Решење система $\mathcal{S}_A$ дато је са:

$$\begin{cases} a_{k+1} = \binom{k+1}{1}^{-1}, & p = 1, \\ a_{k+2-p} = \left(\binom{k}{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1}\binom{k+1-i}{p-i}a_{k+1-i}\right)\binom{k+2-p}{1}^{-1}, & p = 2, \ldots, k+1. \end{cases}$$

Доказ. Матрица система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ се јасно чита из једначина (17) и поклапа се са матрицом $M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ приказаном једначином (18). Детерминанта матрице $M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ је једнака производу дијагоналних елемената, који је једнак $(k+1)!$. Како је $(k+1)! \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, систем линеарних једначина одређен матрицом $M_{\mathcal{S}_{\mathcal{A}}}$ има јединствено решење по a_{k+1}, a_k, $\dots$, a_2, a_1. С обзиром на додатни услов (10), а на основу резултата приказаног у тврђењу 1 и у складу са ознакама $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\pi = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 0$, $A_0 = a_0$, закључујемо да је $\alpha a_0 + \beta A_0 = 0$. Стога, линеарна комбинација $\alpha p_{k+1}(1+x) + \beta p_{k+1}(x) \equiv p_{k+1}(1+x) - p_{k+1}(x)$ не зависи од a_0, тј. a_0 је произвољна константа која не ремети испуњеност услова (10).

Вредност променљиве a_{k+1} је $a_{k+1} = \binom{k}{0}\binom{k+1}{1}^{-1}$, што закључујемо на основу прве једначине система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

Такође, p-та једначина система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ је

$$\binom{k+2-1}{p} a_{k+1} + \binom{k+2-2}{p-1} a_k + \cdots + \binom{k+2-(p-1)}{2} a_{k+2-(p-1)} + \\ + \binom{k+2-p}{1} a_{k+2-p} = \binom{k}{p-1}.$$

Под претпоставком да су a_{k+2-1}, $\dots$, $a_{k+2-(p-1)}$ непознате система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ које су претходно одређене, следи да је

$$a_{k+2-p} = \left(\binom{k}{p-1} - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{k+1-i}{p-i} u_{k+1-i}\right) \binom{k+2-p}{1}^{-1},$$

чиме је доказ ове теореме завршен. ∎

Последица 1. *Важи једнакост $p_{k+1}(n) = a_0 + \mathcal{S}_n^k$ за произвољне бројеве $n, k \in \mathbb{N}$. Уколико је $a_0 = 0$, вредности полинома $p_{k+1}(x)$ у тачкама $n \in \mathbb{N}$ су једнаке $\mathcal{S}_n^k$.* ∎

3. Суме степенованих природних бројева

Решења система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ задатог једначинама (17) су индиректно одређена. Због тога ћемо се, у овом поглављу, позабавити сумама $\mathcal{S}_n^k = \sum_{i=1}^n i^k$, $k = 1, \dots, 10$.

На основу последице 1 закључујемо да је

$$\mathcal{S}_n^k = p_{k+1}(n) - a_0.$$

Уколико је $a_0 = 0$, онда се полином $p_{k+1}(x)$ редукује на полином $p_{k+1}^0(x)$ и важи

$$p_{k+1}^0(n) = \mathcal{S}_n^k.$$

За $k \geqslant 10$ добијамо једанаест решења система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$:

(19)

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+1},\ a_k = \frac{1}{2},\ a_{k-1} = \frac{k}{12},\ a_{k-2} = 0,\ a_{k-3} = -\frac{1}{120}\binom{k}{3},\ a_{k-4} = 0,$$
$$a_{k-5} = \frac{1}{252}\binom{k}{5},\ a_{k-6} = 0,\ a_{k-7} = -\frac{1}{240}\binom{k}{7},\ a_{k-8} = 0,\ a_{k-9} = \frac{1}{132}\binom{k}{9}.$$

Уколико је $k = k_0 < 10$, тада су решења система $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ бројеви a_{k+1}, a_k, $\dots$, a_{k+2-k_0} док су остали коефицијенти a_{k+1-k_0}, a_{k-k_0}, $\dots$, a_{k-9} једнаки 0.

3.1. Случај $k = 1$

Када је $k = 1$, одговарајући полином $p^0_{k+1}(x)$ који одговара збиру $\mathcal{S}^1_n = 1 + \cdots + n$ је степена 2 и одређен је коефицијентима $a_2 = a_{1+1}$ и a_1. У овом случају је $a_2 = \dfrac{1}{2}$ и $a_1 = \dfrac{1}{2}$ па је

$$\mathcal{S}^1_n = a_2 n^2 + a_1 n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{20}$$

3.2. Случај $k = 2$

Када је $k = 2$, полином $p^0_{k+1}(x)$ који одговара збиру $\mathcal{S}^2_n = 1^2 + \cdots + n^2$ је степена 3. Тај полином је одређен коефицијентима $a_3 = \dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$ и $a_1 = \dfrac{1}{6}$. Посматрана сума $\mathcal{S}^2_n$ је

$$\mathcal{S}^2_n = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{21}$$

3.3. Случај $k = 3$

Када је $k = 3$, сума $\mathcal{S}^3_n = 1^3 + \cdots + n^3$ је одређена полиномом $p^0_{k+1}(x)$ степена 4. Тај полином је одређен коефицијентима $a_4 = a_{3+1}$, a_3, $a_2 = a_{3-1}$, $a_1 = a_{3-2}$. Користећи једнакости (19), долазимо до закључка да је

$$\mathcal{S}^3_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2. \tag{22}$$

3.4. Случај $k = 4$

Када је $k = 4$, полином $p^0_{k+1}(x)$ који одређује суму $\mathcal{S}^4_n = 1^4 + \cdots + n^4$ је степена 5. Одговарајући коефицијенти тог полинома су $a_5 = a_{4+1}$, a_4, $a_3 = a_{4-1}$, $a_2 = a_{4-2}$, $a_1 = a_{4-3}$. На основу једнакости (19) долазимо до закључка да је

$$\mathcal{S}^4_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1). \tag{23}$$

3.5. Случај $k = 5$

Када је $k = 5$, сума $\mathcal{S}^5_n = 1^5 + \cdots + n^5$ је вредност полинома $p^0_{k+1}(x)$ степена 6 чији су коефицијенти $a_6 = a_{5+1}$, a_5, $a_4 = a_{5-1}$, $a_3 = a_{5-2}$, $a_2 = a_{5-3}$, $a_1 = a_{5-4}$. На основу једнакости (19), имамо следеће

$$\mathcal{S}^5_n = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1). \tag{24}$$

3.6. Случај $k = 6$

Када је $k = 6$, полином $p^0_{k+1}(x)$ којим је одређен збир $\mathcal{S}^6_n = 1^6 + \cdots + n^6$ је степена 7 а његови коефицијенти су $a_7 = a_{6+1}$, a_6, $a_5 = a_{6-1}$, $a_4 = a_{6-2}$,

$a_3 = a_{6-3}$, $a_2 = a_{6-4}$, $a_1 = a_{6-5}$. На основу једнакости (19) закључујемо да је посматрани збир

$$\mathcal{S}_n^6 = \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1). \tag{25}$$

3.7. Случај $k = 7$

Када је $k = 7$, тражени полином $p_{k+1}^0(x)$, којим је одређена сума $\mathcal{S}_n^7 = 1^7 + \cdots + n^7$, је степена 8 и одређен је коефицијентима $a_8 = a_{7-1}$, a_7, $a_6 = a_{7-1}$, $a_5 = a_{7-2}$, $a_4 = a_{7-3}$, $a_3 = a_{7-4}$, $a_2 = a_{7-5}$, $a_1 = a_{7-6}$. На основу једнакости (19) долазимо до следећих једнакости

$$\mathcal{S}_n^7 = \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2). \tag{26}$$

3.8. Случај $k = 8$

Када је $k = 8$, полином $p_{k+1}^0(x)$ који одређује збир $\mathcal{S}_n^8 = 1^8 + \cdots + n^8$ је степена 9. Коефицијенти тог полинома су $a_9 = a_{8+1}$, a_8, $a_7 = a_{8-1}$, $a_6 = a_{8-2}$, $a_5 = a_{8-3}$, $a_4 = a_{8-4}$, $a_3 = a_{8-5}$, $a_2 = a_{8-6}$, $a_1 = a_{8-7}$. На основу једнакости (19) следи да је посматрана сума једнака

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^8 &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\ &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3). \end{aligned} \tag{27}$$

3.9. Случај $k = 9$

Када је $k = 9$, полином $p_{k+1}^0(x)$ који одређује суму $\mathcal{S}_n^9 = 1^9 + \cdots + n^9$ је степена 10. Коефицијенти у том полиному су $a_{10} = a_{9+1}$, a_9, $a_8 = a_{9-1}$, $a_7 = a_{9-2}$, $a_6 = a_{9-3}$, $a_5 = a_{9-4}$, $a_4 = a_{9-5}$, $a_3 = a_{9-6}$, $a_2 = a_{9-7}$, $a_1 = a_{9-8}$. На основу једнакости (19) следи да је

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^9 &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\ &= \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3). \end{aligned} \tag{28}$$

3.10. Случај $k = 10$

Када је $k = 10$, полином $p_{k+1}^0(x)$ који одређује збир $\mathcal{S}_n^{10} = 1^{10} + \cdots + n^{10}$ је степена 11. Коефицијенти тог полинома су $a_{11} = a_{10+1}$, a_{10}, $a_9 = a_{10-1}$, $a_8 = a_{10-2}$, $a_7 = a_{10-3}$, $a_6 = a_{10-4}$, $a_5 = a_{10-5}$, $a_4 = a_{10-6}$, $a_3 = a_{10-7}$, $a_2 = a_{10-8}$, $a_1 = a_{10-9}$. На основу једнакости (19) следи

(29)

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^{10} &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n \\ &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5). \end{aligned}$$

3.11. Односи међу сумама степенованих природних бројева

У овом делу рада ћемо одредити неке односе полинома $\mathcal{S}_n^{k_1}$ и $\mathcal{S}_n^{k_2}$ при чему је полином $\mathcal{S}_n^{k_1}$ дељив полиномом $\mathcal{S}_n^{k_2}$.

Upoређивањем једнакости (20)–(29) закључујемо да важе наредне једнакости:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{10} = \dfrac{1}{33}\mathcal{S}_n^1(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5), \\ \mathcal{S}_n^{10} = \dfrac{1}{11}\mathcal{S}_n^2(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{9} = \dfrac{1}{10}\mathcal{S}_n^1 n(n+1)(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3), \\ \mathcal{S}_n^{9} = \dfrac{1}{5}\mathcal{S}_3^3(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{8} = \dfrac{1}{45}\mathcal{S}_n^1(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3), \\ \mathcal{S}_n^{8} = \dfrac{1}{15}\mathcal{S}_n^2(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{7} = \dfrac{1}{12}\mathcal{S}_n^1 n(n+1)(3n^4+6n^3-n^2-4n+2), \\ \mathcal{S}_n^{7} = \dfrac{1}{6}\mathcal{S}_n^3(3n^4+6n^3-n^2-4n+2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{6} = \dfrac{1}{21}\mathcal{S}_n^1(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1), \\ \mathcal{S}_n^{6} = \dfrac{1}{7}\mathcal{S}_n^2(3n^4+6n^3-3n+1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{5} = \dfrac{1}{6}\mathcal{S}_n^1 n(n+1)(2n^2+2n-1), \\ \mathcal{S}_n^{5} = \dfrac{1}{3}\mathcal{S}_n^3(2n^2+2n-1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_n^{4} = \dfrac{1}{15}\mathcal{S}_n^1(2n+1)(3n^2+3n-1), \\ \mathcal{S}_n^{4} = \dfrac{1}{5}\mathcal{S}_n^2(3n^2+3n-1), \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_n^3 = \frac{1}{2}\mathcal{S}_n^1 n(n+1) = \left(\mathcal{S}_n^1\right)^2,$$

$$\mathcal{S}_n^2 = \frac{1}{3}\mathcal{S}_n^1(2n+1).$$

4. Закључак

У овом раду, одређени су полиноми степена $k+1$ и облика $p_{k+1}(x) = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ који задовољавају једнакост $p_{k+1}(1+x) = p_{k+1}(x) + (1+x)^k$. Уколико је $a_0 = 0$, полиноми $p_{k+1}(x)$ се редукују на полиноме $p_{k+1}^0(x)$ за које важи $p_{k+1}^0(n) = \mathcal{S}_n^k$, где су k и n природни бројеви. Након тога, одређене су суме $\mathcal{S}_n^k$ за $k \in \{1, \ldots, 10\}$ и истакнути су односи неких од тих сума.

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Dimitrijević, *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Niš, 2010.

[2] Ž. Mijaljević, *Alebra I*, MILGOR-serija univerzitetski udžbenici, Beograd, Moskva, 1993.

[3] С. Милић, *Елементи алгебре*, треће издање, Београд, 1995.

[4] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Algebra I*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2000.

Н.В.: Математички институт САНУ, Београд

E-mail: n.o.vesic@outlook.com

И.Ђ.: Институт за мултидисциплинарна истраживања, Београд